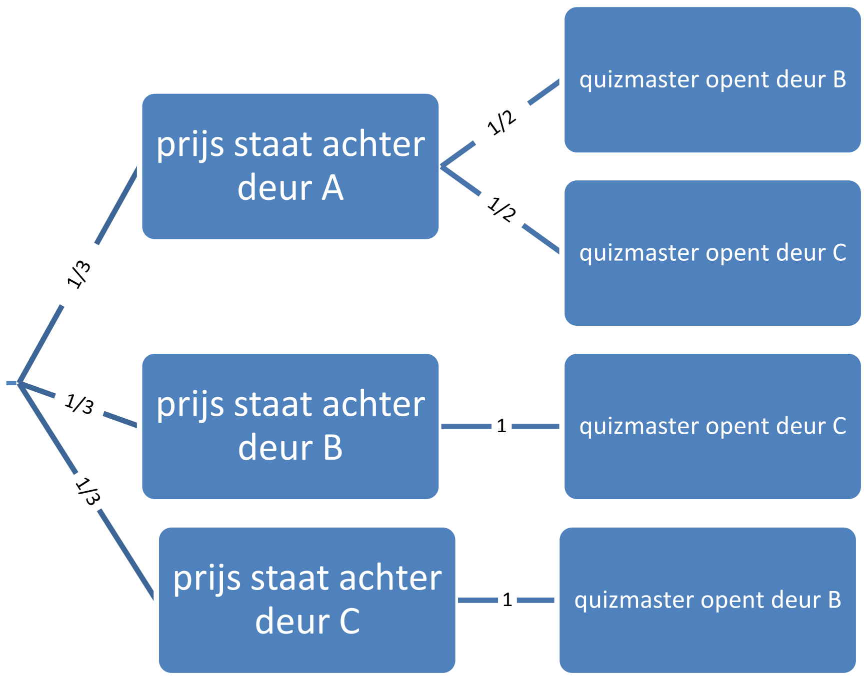
Het begrip voorwaardelijke kans en het langs Bayesiaanse weg actualiseren van een prior kans tot een posterior kans op basis van de meest recente data, toegelicht aan de hand van het drie deuren- en het drie gevangenenvraagstuk.

Aanname:
1) als er een keuzemogelijkheid is (de quizmaster kan uit 2 deuren met een geit erachter kiezen, de cipier kan 2 namen noemen van gevangenen die niet worden vrijgelaten) dan wordt die keuze willekeurig (aselect, at random) gemaakt, bijvoorbeeld op basis van de uitkomst van een worp met een eerlijke/zuivere munt.
2) de quizmaster weet achter welke deur de auto staat en opent altijd een deur waar een geit achter staat (een van de twee overige deuren, dus niet de deur die de kandidaat in eerste instantie heeft aangewezen)
de cipier weet welke gevangene zal worden vrijgelaten en noemt altijd de naam van een van de andere twee gevangenen die niet zal worden vrijgelaten (en zegt dus niets over de gevangene die de vraag aan de cipier heeft gesteld)

Het vraagstuk van de drie deuren (Monty Hall problem) :
Er zijn drie deuren, achter een daarvan staat een auto en achter de andere twee staat een geit.
De kandidaat wijst een deur aan, die deur blijft gesloten en vervolgens opent de quizmaster een deur waarachter een geit staat. De quizmaster vraagt dan aan de deelnemer of die bij de oorspronkelijke keuze blijft of wil wisselen naar de deur die overblijft.
Bijvoorbeeld:
de kandidaat kiest deur A en de quizmaster opent deur B met een geit er achter. Is het verstandig om bij de eerste keuze te blijven of juist om te wisselen van deur?
Vaak wordt als volgt geredeneerd: er zijn nog twee dichte deuren over (in het voorbeeld deur A en deur C) en achter een van die deuren staat een auto. Het maakt dus niets uit of je wisselt of niet want de kans op de auto is nu gelijk aan 1/2, zowel voor deur A als deur C.
Met behulp van onderstaande redenering kan aangetoond worden dat het wel verstandig is om van deur te wisselen omdat de kans op de auto daardoor stijgt van 1/3 naar 2/3.

Uitwerking:
De prior kansen (de kansen voordat de quizmaster deur B geopend heeft) zijn 1/3 voor elke deur, de observatie (data) is: quizmaster opent deur B
De relevante voorwaardelijke kansen zijn dan:


prijs staat achter deur A
prijs staat achter deur B
prijs staat achter deur C
1/3
1/3
1/3
1/2
1/2
1
1
quizmaster opent deur B
quizmaster opent deur C
quizmaster opent deur C
quizmaster opent deur B

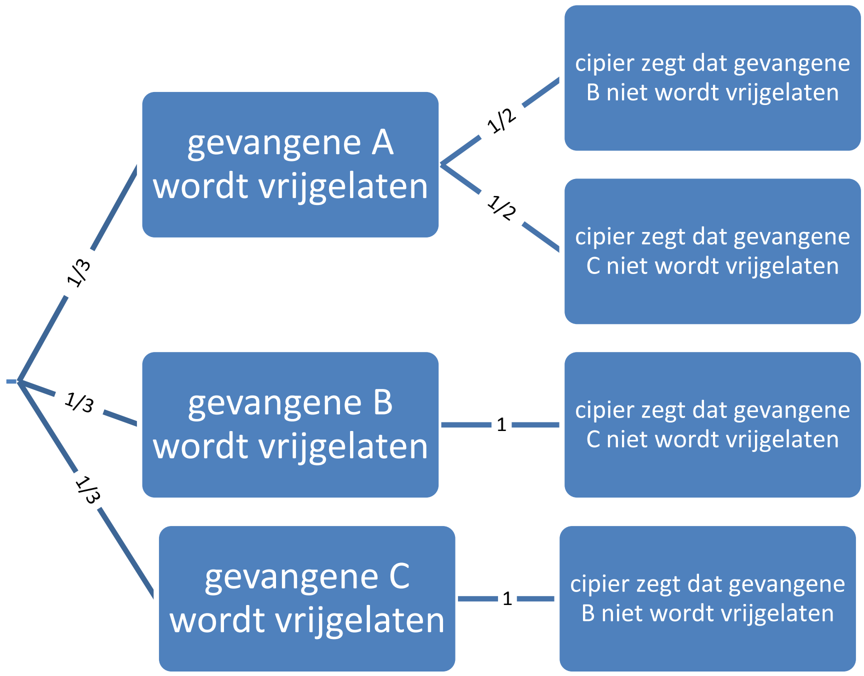
$$P(prijs - deurA | quizmaster - deurB)$$
$$P(prijs - deurC | quizmaster - deurB)$$
$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$
$$P(Y|X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(X)}$$
$$P(X \cap Y) = P(Y \cap X) \rightarrow P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$
$$P(Y) = P(Y \cap X) + P(Y \cap \neg X) = P(Y|X)P(X) + P(Y|\neg X)P(\neg X) \rightarrow$$
$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y|X)P(X) + P(Y|\neg X)P(\neg X)}$$
$$P(prijs - deurA | quizmaster - deurB) =$$
$$\frac{P(quizmaster - deurB | prijs - deurA)P(prijs - deurA)}{P(quizmaster - deurB | prijs - deurA)P(prijs - deurA) + P(quizmaster - deurB | prijs - deurC)P(prijs - deurC)} =$$
$$\frac{1/2 \times 1/3}{1/2 \times 1/3 + 1 \times 1/3} = \frac{1/6}{1/6 + 2/6} = \frac{1}{3}$$
$$P(prijs - deurC | quizmaster - deurB) =$$
$$\frac{P(quizmaster - deurB | prijs - deurC)P(prijs - deurC)}{P(quizmaster - deurB | prijs - deurC)P(prijs - deurC) + P(quizmaster - deurB | prijs - deurA)P(prijs - deurA)} =$$
$$\frac{1 \times 1/3}{1 \times 1/3 + 1/2 \times 1/3} = \frac{1/3}{1/3 + 1/6} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Alternatieve uitwerking:
Als de kandidaat besluit om bij de oorspronkelijke keus (deur A) te blijven, wanneer wordt dan de auto gewonnen?
Antwoord: wanneer de oorspronkelijke keus de juiste was en de kans daarop is 1/3.
Als de kandidaat besluit om van deur te wisselen (van deur A naar deur C), wanneer wordt dan de auto gewonnen?
Antwoord: wanneer de oorspronkelijke keus niet de juiste was en de kans daarop is 2/3.

Het vraagstuk van de drie gevangenen

Er zijn drie gevangenen, A, B en C. Ter gelegenheid van een nationale viering wordt een van hen vrijgelaten, ook de gevangenen ontvangen dit bericht. Wie van de drie zal worden vrijgelaten wordt echter niet bekend gemaakt. De cipier weet welke gevangene zal worden vrijgelaten maar mag deze informatie uiteraard niet doorgeven aan de gevangenen. Een gevangene vraagt aan de cipier of zij kan zeggen welke van de andere twee gevangenen <u>niet</u> zal worden vrijgelaten. De cipier weigert dit op grond van de volgende redenering:
als ik dit doe blijven er twee gevangenen over en omdat een van hen zal worden vrijgelaten zal de kans op vrijlating stijgt van 1/3 naar 1/2, ik heb dus informatie vrijgegeven en dat mag ik niet doen.

Heeft de cipier gelijk?
Bijvoorbeeld:
gevangene A vraagt de cipier de naam van een van de twee andere gevangenen te noemen die niet wordt vrijgelaten. De cipier noemt gevangene B.
Vraag: als de cipier de naam noemt, vernadert dan de kans dat gevangene A zal worden vrijgelaten?



$$P(A-vrij|cipier-B)=$$

$$\frac{P(cipier-B|A-vrij)P(A-vrij)}{P(cipier-B|A-vrij)P(A-vrij)+P(cipier-B|C-vrij)P(C-vrij)}=$$

$$\frac{1/2\times 1/3}{1/2\times 1/3+1\times 1/3}=\frac{1/6}{1/6+2/6}=\frac{1}{3}$$

$$P(C-vrij|cipier-B)=$$

$$\frac{P(cipier-B|C-vrij)P(C-vrij)}{P(cipier-B|C-vrij)P(C-vrij)+P(cipier-B|A-vrij)P(A-vrij)}=$$

$$\frac{1\times 1/3}{1\times 1/3+1/2\times 1/3}=\frac{1/3}{1/3+1/6}=\frac{2/6}{3/6}=\frac{2}{3}$$