Theorie machtsverheffen, worteltrekken en logaritmen
(gedeelte uit hoofdstuk 1 van Rob Flohr (2007). *Basiswiskunde voor statistiek*. Den Haag: Academic Service)

1.2 Machtsverheffen en worteltrekken

In deze paragraaf bespreken we de bewerkingen machtsverheffen en worteltrekken en breiden we de getalverzameling van rationale getallen Q uit tot de verzameling van alle reële getallen R.

Machten
Voor elk getal a geldt:
$a+a=2a$
$a+a+a=3a$
………………..
$\underbrace{a+a+a+............+a}_{k}=ka$, waarbij k elk positief geheel getal is.
We zien dat de herhaalde optelling van a uitmondt in een vermenigvuldiging, anders gezegd: de 'sommen' $a+a$, $a+a+a$ enz. worden geschreven als de 'producten' $2a$, $3a$ enz.
Analoog hieraan leidt de herhaalde vermenigvuldiging van elk getal a tot het machtsverheffen:
$a\times a=a^2$
$a\times a\times a=a^3$
…………….
$\underbrace{a\times a\times a\times ....\times a}_{k}=a^k$, waarbij k elk positief geheel getal is.
Voorbeelden:
$3^5=3\times3\times3\times3\times3=243$
$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{81}$
$(-10)^3=(-10)\times(-10)\times(-10)=-1000$
$(-0.7)^4=(-0.7)\times(-0.7)\times(-0.7)\times(-0.7)=0.2401$

We definiëren de volgende begrippen: in de uitdrukking a^k noemen we a het grondtal, k de exponent en a^k de macht (preciezer: de k^e macht van a of a tot de macht k). In het voorbeeld van $3^5=243$ betekent dit: 3 is het grondtal, 5 is de exponent en 243 is 3 tot de macht 5.

Eigenschappen van machten
a) wanneer we machten met hetzelfde grondtal met elkaar vermenigvuldigen, bijv. $a^5\times a^2$, dan krijgen we een macht met hetzelfde grondtal en een exponent die gelijk is aan de som van de oorspronkelijke exponenten. Ga maar na: $a^5\times a^2=\underbrace{a\times a\times a\times a\times a}_{5}\times\underbrace{a\times a}_{2}=a^7(=a^{5+2})$.

Algemeen geformuleerd: $a^p\times a^q=a^{p+q}$
b) wanneer we machten met hetzelfde grondtal op elkaar delen, bijv. $a^5:a^2$, dan krijgen we een macht met hetzelfde grondtal en een exponent die gelijk is aan het verschil van de

oorspronkelijke exponenten. Ga maar na: $a^5 : a^2 = \dfrac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a \times a = a^3 (= a^{5-2})$.

Algemeen geformuleerd: $a^p : a^q = a^{p-q}$

c) uit het bovenstaande volgt: $a^5 : a^5 = \dfrac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = 1 = a^{5-5} = a^0$ en

$a^2 : a^5 = \dfrac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^3} = a^{-3} (= a^{2-5})$. We kunnen de regel voor het delen ook afleiden uit die voor het vermenigvuldigen. Immers, indien geldt $a^5 \times a^2 = a^7$, geldt ook $a^7 : a^5 = a^2$ en $a^7 : a^2 = a^5$.

Vervolgens kijken we naar

d) de macht van een macht, bijvoorbeeld $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6$. We zien dat we de exponenten moeten vermenigvuldigen, immers $a^6 = a^{2 \times 3}$.

Algemeen geformuleerd: $(a^p)^q = a^{p \times q}$

e) de macht van een product, bijvoorbeeld

$(a^2 \times b^3)^4 = (a^2 \times b^3) \times (a^2 \times b^3) \times (a^2 \times b^3) \times (a^2 \times b^3) = a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 \times b^3 \times b^3 \times b^3 \times b^3 = (a^2)^4 \times (b^3)^4 = a^8 \times b^{12}$

Er geldt dus blijkbaar dat $(a^2 \times b^3)^4 = a^{2 \times 4} b^{3 \times 4} = a^8 b^{12}$ (wellicht ten overvloede wijzen we erop, dat een vermenigvuldiging op verschillende manieren kan worden weergegeven: $a \times b = a.b = ab$).

Algemeen geformuleerd: $(a^p \times b^q)^r = a^{pr} b^{qr}$

f) de macht van een quotiënt, bijvoorbeeld

$\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^4 = \left(\dfrac{a^2}{b^3}\right) \times \left(\dfrac{a^2}{b^3}\right) \times \left(\dfrac{a^2}{b^3}\right) \times \left(\dfrac{a^2}{b^3}\right) = \dfrac{a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2}{b^3 \times b^3 \times b^3 \times b^3} = \dfrac{a^8}{b^{12}}$. We zien dat $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^4 = \dfrac{a^8}{b^{12}} = \dfrac{a^{2 \times 4}}{b^{3 \times 4}}$

, algemeen geformuleerd: $\left(\dfrac{a^p}{b^q}\right)^r = \dfrac{a^{pr}}{b^{qr}}$

Samengevat:

$a^k = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots. \times a}_{k}$, waarbij k elk positief geheel getal is.

$a^p \times a^q = a^{p+q}$

$a^p : a^q = a^{p-q}$

$a^0 = 1$

$a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$

$(a^p)^q = a^{p \times q}$

$(a^p \times b^q)^r = a^{pr} b^{qr}$

$\left(\dfrac{a^p}{b^q}\right)^r = \dfrac{a^{pr}}{b^{qr}}$

n.b.

- bij $a^0 = 1$ hoort de voorwaarde $a \neq 0$, omdat 0^0 niet gedefinieerd is

-wanneer de grondtallen verschillend zijn, gaan de bovenstaande regels niet op, vergelijk:

$a^3 \times b^4 = a \times a \times a \times b \times b \times b \times b = a^3 b^4$ en

$$a^3 : b^4 = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^4}$$

Opgave 1.2.1)

a) $7^3 =$

b) $(-5)^3 =$

c) $(-5)^4 =$

d) $(-5)^0 =$

e) $\left(117\frac{3}{19}\right)^0 =$

f) $3^{-2} =$

g) $(-3)^{-2} =$

h) $(-3)^{-3} =$

i) $0^3 =$

j) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} =$

k) $3^7.3^{-2}.3^{-4} =$

l) $\frac{3^3.(3^2)^5}{(-3)^9.3^7} =$

m) $4^0.4^2.4^3 =$

n) $\frac{a^3b^{-5}}{(a^3b^{-2})^3} =$

Worteltrekken
In het bovenstaande hebben we de begrippen grondtal, exponent en macht leren kennen. Bij machtsverheffen gaat het om het vinden van de macht, gegeven een bepaald grondtal en een bepaalde exponent. Een vraagstuk dat betrekking heeft op machtsverheffen, heeft namelijk de vorm $a^p = ?$. Wanneer de exponent en de macht gegeven zijn maar het grondtal niet, krijgen we een vraagstuk van de vorm $?^p = b$. Een paar voorbeelden:

$?^2 = 49$. Het antwoord is 7 want $7^2 = 49$.

$?^2 = 81$. Het antwoord is 9 want $9^2 = 81$.

$?^2 = \frac{1}{25}$. Het antwoord is $\frac{1}{5}$ want $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$.

Bij dit soort vraagstukken zoeken we dus het grondtal en de bewerking die hierbij hoort heet worteltrekken. Kijken we nog even naar het eerste voorbeeld $?^2 = 49$, dan is de vraag: welk getal tot de tweede macht (of: in het kwadraat) is gelijk aan 49? Nu geldt zowel dat $7^2 = 49$ als $(-7)^2 = 49$ en omdat we ons beperken tot de positieve uitkomst, definiëren we het volgende: de tweedemachtswortel van 49 is het niet-negatieve getal p waarvoor geldt dat $p^2 = 49$. We schrijven dit als volgt: $p = \sqrt[2]{49}$, waarin we $\sqrt{\ }$ het wortelteken, 2 de wortelexponent en het berekenen van $\sqrt[2]{49}$ het worteltrekken noemen (i.p.v. $\sqrt[2]{49}$ schrijven we doorgaans gewoon $\sqrt{49}$, wanneer de wortelexponent niet vermeld wordt gaat het dus om een tweedemachtswortel).

Opgave 1.2.2)

a) $\sqrt{121} =$

b) $\sqrt{900} =$

c) $\sqrt{196} =$

d) $\sqrt{2500} =$

f) $\sqrt{1} =$

g) $\sqrt{10^6} =$

h) $\sqrt{16^{32}} =$

i) $\sqrt{(-3)^2} =$

e) $\sqrt{9+16} =$

j) $\sqrt{(16298)^2} =$

Het nemen van een tweedemachtswortel is dus de omgekeerde (inverse) bewerking van het kwadrateren, zo geldt bijvoorbeeld $\sqrt{49} = 7$ want $7^2 = 49$. Dit betekent, dat het getal onder het wortelteken groter dan of gelijk aan nul moet zijn. Immers, stel dat $\sqrt{-49}$ gelijk is aan een getal p, dan moet dus gelden dat $p^2 = -49$. Maar omdat een kwadraat van een getal een positief getal oplevert, kan dit niet het geval zijn. We kunnen nu in het algemeen definiëren: de (tweedemachts)wortel van een getal $a \geq 0$ is het getal p waarvoor geldt dat $p \geq 0$ en $p^2 = a$.

In de voorbeelden en de opgaven tot nog toe kwam het worteltrekken ‘precies uit’: de uitkomst was telkens een getal dat gekwadrateerd het getal onder het wortelteken opleverde. Er zijn echter talloze voorbeelden te bedenken waarbij dit niet het geval is. In zo’n geval proberen we zoveel mogelijk kwadraten in het getal onder het wortelteken op te sporen om de wortel te kunnen vereenvoudigen. Neem bijvoorbeeld $\sqrt{180}$; nu is $13^2 = 169$ en $14^2 = 196$, dus de uitkomst van $\sqrt{180}$ moet ergens tussen 13 en 14 in liggen. Dit betekent dat $\sqrt{180}$ geen geheel getal als uitkomst heeft (verderop zullen we zien dat de uitkomst van $\sqrt{180}$ ook geen breuk is!). Om de kwadraten in het getal 180 op te sporen, kunnen we een herhaalde deling uitvoeren, waarbij we eerst zoveel mogelijk door 2 delen, dan door 3 enz. We krijgen in het geval van 180 dan:

$180 : 2 = 90$
$90 : 2 = 45$
$45 : 3 = 15$
$15 : 3 = 5$
$5 : 5 = 1$

Dit houdt in dat we 180 kunnen schrijven als het product $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

Daardoor geldt $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} = (2 \times 3) \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$. Controle: als $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$, dan moet gelden: $\left(6\sqrt{5}\right)^2 = 180$. Welnu, $\left(6\sqrt{5}\right)^2 = 6\sqrt{5} \times 6\sqrt{5} = 6^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 36 \times 5 = 180$ (dat $\left(\sqrt{5}\right)^2$ gelijk is aan 5, volgt direct uit de definitie van worteltrekken: $\sqrt{5}$ is het getal dat, gekwadrateerd, 5 oplevert, m.a.w. $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$).

Op dezelfde wijze kunnen we $\sqrt{1400}$ vereenvoudigen:

$\sqrt{1400} = \sqrt{2^3.5^2.7} = \sqrt{2.2^2.5^2.7} = 2.5\sqrt{2.7} = 10\sqrt{14}$. Controle:

$\left(10\sqrt{14}\right)^2 = 10^2.\left(\sqrt{14}\right)^2 = 100.14 = 1400$

Opgave 1.2.3) Vereenvoudig op dezelfde wijze de volgende wortels:

a) $\sqrt{98} =$
b) $\sqrt{54} =$
c) $\sqrt{48} =$
d) $\sqrt{90} =$
e) $\sqrt{162} =$

f) $\sqrt{432} =$
g) $\sqrt{500} =$
h) $\sqrt{512} =$
i) $\sqrt{891} =$
j) $\sqrt{4050} =$

Analoog aan hetgeen hiervoor gezegd is over worteltrekken t.a.v. gehele getallen, kunnen we wortels van breuken berekenen resp. vereenvoudigen. Zo geldt bijvoorbeeld:

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ want $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ en

$\sqrt{\frac{121}{144}} = \frac{11}{12}$ want $\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{11}{12} \times \frac{11}{12} = \frac{121}{144}$

Bij het vereenvoudigen zorgen we er voor dat, indien er in de noemer geen kwadraat voorkomt, we daar een kwadraat krijgen door teller en noemer met hetzelfde getal te vermenigvuldigen. Bijvoorbeeld:

$\sqrt{\frac{14}{25}} = \sqrt{\frac{14}{5^2}} = \frac{1}{5}\sqrt{14}$ (er staat in de noemer al een kwadraat)

maar $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{7 \times 8}{8 \times 8}} = \sqrt{\frac{56}{64}} = \frac{1}{8}\sqrt{56} = \frac{1}{8}\sqrt{4 \times 14} = \frac{2}{8}\sqrt{14} = \frac{1}{4}\sqrt{14}$

en $\sqrt{\frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{3^2}{10} \times \frac{10}{10}} = \sqrt{\frac{3^2 \times 10}{10^2}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}$

Opgave 1.2.4) Vereenvoudig de volgende breuken:

a) $\sqrt{\frac{5}{12}} =$

b) $\sqrt{\frac{8}{27}} =$

c) $\sqrt{1\frac{1}{8}} =$

d) $\sqrt{1\frac{3}{5}} =$

e) $\sqrt{\frac{3}{7}} =$

Tot nog toe hebben we het gehad over tweedemachtswortels ($\sqrt[2]{\ }$ of $\sqrt{\ }$), ook wel vierkantswortels genoemd. Daarnaast bestaan er ook hogeremachtswortels waarbij de wortelexponent ≥ 3 is.

Voorbeelden:

$\sqrt[3]{8} = 2$ want $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{125} = 5$ want $5^3 = 125$

$\sqrt[89]{1} = 1$ want $1^{89} = 1$

$\sqrt[4]{81} = 3$ want $3^4 = 81$

$\sqrt[7]{128} = 2$ want $2^7 = 128$

en ook

$\sqrt[3]{-8} = -2$ want $(-2)^3 = -8$

$\sqrt[3]{-125} = -5$ want $(-5)^3 = -125$

$\sqrt[5]{-32} = -2$ want $(-2)^5 = -32$

$\sqrt[13]{-1} = -1$ want $(-1)^{13} = -1$

maar

$\sqrt[4]{-1}$ bestaat niet omdat $(-1)^4$ een positieve uitkomst heeft, namelijk 1.

Zo komen we tot de volgende mogelijkheden:

	de wortelexponent is een	de wortelexponent is een

	even getal	oneven getal
het getal onder het wortelteken is positief	$\sqrt[even]{positief} = positief$	$\sqrt[oneven]{positief} = positief$
het getal onder het wortelteken is negatief	$\sqrt[even]{negatief}$ bestaat niet	$\sqrt[oneven]{negatief} = negatief$

Het berekenen en vereenvoudigen van hogeremachtswortels verloopt analoog aan de wijze waarop dit hierboven voor tweedemachtswortels is uiteengezet.
Voorbeelden:

a) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[5]{-64} = \sqrt[5]{(-2)^5 \times 2} = -2\sqrt[5]{2}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{2}{3}$ want $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{343}{1000}} = \dfrac{7}{10}$ want $\left(\dfrac{7}{10}\right)^3 = \dfrac{7^3}{10^3} = \dfrac{343}{1000}$

f) $\sqrt[2]{\dfrac{1}{32}} = \dfrac{1}{2}$ want $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1^5}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

g) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{125}} = -\dfrac{3}{5}$ want $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^3 = -\dfrac{3^3}{5^3} = -\dfrac{27}{125}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{16}} = \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{20}$ want $\sqrt[3]{\dfrac{5}{16}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{4^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{5 \times 4}{4^2 \times 4}} = \sqrt[3]{\dfrac{20}{4^3}} = \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{20}$

maar:

i) $\sqrt[4]{\dfrac{-81}{625}}$ bestaat niet.

Opgave 1.2.5) Vereenvoudig resp. bereken de volgende wortels:

a) $\sqrt[3]{-54} =$

b) $\sqrt[4]{48} =$

c) $\sqrt[6]{-96} =$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} =$

e) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{64}} =$

f) $\sqrt[5]{\dfrac{3}{8}} =$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{-2}{25}} =$

h) $\sqrt[17]{\dfrac{0}{-336}} =$

Uit hetgeen we hierboven beschreven hebben met betrekking tot worteltrekken, kunnen we het volgende afleiden:
$\sqrt[3]{64} = 4$ (want $4^3 = 64$); wanneer we nu de gelijkheid $\sqrt[3]{64} = 4$ in de vorm van machten met grondtal 2 schrijven, krijgen we: $\sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 2^{\frac{6}{3}}$. We kunnen $\sqrt[3]{2^6}$ dus schrijven als $2^{\frac{6}{3}}$.
Algemeen geformuleerd:

$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ (voor elk positief grondtal a).

Zo geldt bijvoorbeeld $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$ (controle: $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{2 \times \frac{1}{2}} = a^1 = a$).

Nemen we voor a bijvoorbeeld het getal 9, dan krijgen we:

$\sqrt{9}=3$ want $3^2=9$ of, anders gezegd, $\sqrt{9}=9^{\frac{1}{2}}$ want $\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^2=9^{2\times\frac{1}{2}}=9$.

Omgekeerd geldt bijvoorbeeld dat $9^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9}$ en $a^{\frac{8}{5}}=\sqrt[5]{a^8}=\sqrt[5]{a^5\times a^3}=a\sqrt[5]{a^3}$. Dit laatste levert bij 'terugrekenen' het volgende resultaat op: $a\sqrt[5]{a^3}=a^1.a^{\frac{3}{5}}=a^{1+\frac{3}{5}}=a^{\frac{8}{5}}$.
We spreken in deze gevallen van <u>gebroken machten</u>, aangezien de exponent een breuk is (in het laatste voorbeeld $\frac{8}{5}$).
Enkele voorbeelden ter toelichting:

$\sqrt[3]{a^{12}}=a^{\frac{12}{3}}=a^4$ $\qquad$ $\sqrt[7]{a^7}=a^{\frac{7}{7}}=a^1=a$

$\sqrt[7]{a^{21}}=a^{\frac{21}{7}}=a^3$ $\qquad$ $\sqrt{a^4}=\sqrt[2]{a^4}=a^{\frac{4}{2}}=a^2$

en omgekeerd:

$(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-8}=-2$ $\qquad$ $81^{\frac{1}{2}}=\sqrt{81}=9$

$16^{\frac{3}{2}}=\sqrt{16^3}=16\sqrt{16}=16\times4=64$ (of: $16^{\frac{3}{2}}=16^1\times16^{\frac{1}{2}}=16\times\sqrt{16}=16\times4=64$)

$160^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{160}=\sqrt[4]{32\times5}=\sqrt[4]{2^5\times5}=\sqrt[4]{2^4\times2\times5}=2\sqrt[4]{10}$

We kunnen ook te maken krijgen met negatieve gebroken exponenten. Vergelijk het volgende voorbeeld: $\sqrt[5]{\frac{1}{a}}=\sqrt[5]{a^{-1}}=a^{-\frac{1}{5}}$. Omgekeerd kan $a^{-\frac{2}{7}}$ geschreven worden als $\sqrt[7]{a^{-2}}=\sqrt[7]{\frac{1}{a^2}}$.

Voorbeelden
(opdracht: schrijf als macht)

$\frac{1}{\sqrt[3]{7}}=\frac{1}{7^{\frac{1}{3}}}=7^{-\frac{1}{3}}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt[4]{11}}=\frac{1}{11^{\frac{1}{4}}}=11^{-\frac{1}{4}}$

$\frac{11}{\sqrt[4]{11}}=\frac{11}{11^{\frac{1}{4}}}=11\times11^{-\frac{1}{4}}=11^{1-\frac{1}{4}}=11^{\frac{3}{4}}$ $\qquad$ $\frac{121}{\sqrt[4]{11}}=\frac{11^2}{11^{\frac{1}{4}}}=11^2\times11^{-\frac{1}{4}}=11^{1\frac{3}{4}}$

(opdracht: schrijf als wortel)

$4^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ $\left(=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$ $\qquad$ $a^3b^{-\frac{1}{2}}=\frac{a^3}{\sqrt{b}}$

$13^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{13^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$ $\left(=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{1}{13}}\right)$ $\qquad$ $17^{-\frac{3}{7}}=\frac{1}{17^{\frac{3}{7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{17^3}}$ $\left(=\frac{\sqrt[7]{1}}{\sqrt[7]{4913}}=\sqrt[7]{\frac{1}{4913}}\right)$

Opgave 1.2.6) Schrijf als wortel resp. als macht:

a) $a^{-2}=$ $\qquad$ f) $a^{\frac{3}{5}}=$

b) $2^{\frac{1}{4}}=$ $\qquad$ g) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=$

c) $\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}=$ $\qquad$ h) $3^{-\frac{1}{4}}=$

d) $(-a)^0 =$

e) $\sqrt[4]{2^3} =$

i) $\sqrt{\frac{1}{3}} =$

j) $\sqrt{0.1} =$

1.3 Irrationale getallen en de verzameling van reële getallen R

In paragraaf 1.1 hebben we eerst N (de verzameling van natuurlijke getallen) uitgebreid tot Z (de verzameling van gehele getallen), en vervolgens Z weer uitgebreid tot Q (de verzameling van rationale getallen). Door het invoeren van de bewerking worteltrekken, zien we ons genoodzaakt om opnieuw tot een uitbreiding van onze getalverzameling over te gaan. Zo hebben we onder meer het getal $\sqrt{2}$ leren kennen. Nu kan $\sqrt{2}$ geen geheel getal zijn, aangezien $1^2 = 1$ en $2^2 = 4$. $\sqrt{2}$ moet dus tussen 1 en 2 liggen ($1 < \sqrt{2} < 2$). Maar we kunnen aantonen dat $\sqrt{2}$ ook geen rationaal getal van de vorm $\frac{p}{q}$ is (d.w.z. een getal dat als een breuk geschreven kan worden).

Bewijs van de stelling dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is.
Stel dat $\sqrt{2}$ geschreven kan worden als een niet vereenvoudigbare breuk $\frac{p}{q}$. Dan geldt volgens de definitie van een tweedemachtswortel dat $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, dus ook $\frac{p^2}{q^2} = 2$ en $p^2 = 2q^2$. Dit betekent dat p^2 een even getal is (ga maar na: als je een getal met 2 vermenigvuldigt, krijg je altijd een even getal, bijv. $2 \times 4 = 8$ maar ook $2 \times 3 = 6$). Maar als p^2 een even getal is, moet p dat ook zijn (als p oneven zou zijn, zou p^2 - het product van twee oneven getallen – ook oneven zijn).
Omdat p een even getal is, mogen we schrijven: $p = 2r$. Wanneer we dit invullen in $p^2 = 2q^2$, dan krijgen we $(2r)^2 = 2q^2$, dus $4r^2 = 2q^2$, dus $2r^2 = q^2$ ofwel $q^2 = 2r^2$. Dit betekent dat q^2 een even getal is. Maar dan is ook q een even getal. Het gevolg is dat de breuk $\frac{p}{q}$ vereenvoudigbaar is, aangezien zowel p als q even getallen zijn. Maar dit is in strijd met onze veronderstelling dat $\frac{p}{q}$ een niet vereenvoudigbare breuk is.
Conclusie: $\sqrt{2}$ is geen rationaal getal.

$\sqrt{2}$ is een voorbeeld van een <u>irrationaal</u> getal. Om het onderscheid tussen rationale getallen (getallen die als een breuk geschreven kunnen worden) en irrationale getallen (waarbij dat niet het geval is) te verduidelijken, geven we van de volgende getallen de decimale schrijfwijze (d.w.z. met cijfers achter de komma).

$\frac{1}{4} = 0.25$ $\qquad$ $\frac{1}{9} = 0.1111111......$

$\frac{1}{10} = 0.1$ $\qquad$ $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857........$

$\frac{5}{32} = 0.15625$ $\qquad$ $\frac{11}{70} = 0.1571428571428571428..........$

$\frac{1}{3} = 0.3333333......$

maar: $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488...............$

We zien dat sommige rationale getallen ($\frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{5}{32}$) een eindige decimale ontwikkeling hebben (het aantal cijfers achter de komma stopt op een geven moment omdat de deling 'opgaat') en dat andere rationale getallen ($\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{11}{70}$) een oneindige decimale ontwikkeling hebben maar wel een repeterend patroon vertonen (vanaf een bepaald punt in de decimale ontwikkeling – dat per getal verschillend kan zijn – is er sprake van een zich herhalende reeks van getallen). We zien ook dat dit laatste niet geldt voor $\sqrt{2}$: de cijfers achter de komma gaan tot in alle eeuwigheid door zonder zichzelf te repeteren. Om dit nog eens goed voor het voetlicht te brengen, geven we hieronder de decimale schrijfwijze van twee andere irrationale getallen, nl. het getal e (zie hoofdstuk 6) en het getal π (het getal dat de verhouding weergeeft tussen de omtrek van een cirkel en de middellijn ervan):

$e = 2.71828182845904523536028747135266249 7.......$

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288 4.......$

Hoeveel cijfers achter de komma er ook verschijnen, er is geen terugkerend patroon te bekennen!

U kunt zich misschien wel voorstellen dat het enige tijd heeft geduurd voordat irrationale getallen – getallen die in zekere zin altijd ongrijpbaar blijven – als echte getallen werden gezien (net zoals de acceptatie van negatieve getallen niet van de ene op de andere dag is gegaan). Zo schrijft de Duitse wiskundige Michael Stifel in zijn *Arithmetica Integra* uit 1544: "On the other hand, other considerations compel us to deny that irrational numbers are numbers at all. To wit, when we seek to subject them to numeration [decimal representation]……we find that they flee away perpetually, so that not one of them can be apprehended precisely in itself……Now that cannot be called a true number which is of such a nature that it lacks precision…..Therefore, just as an infinite number is not a number, so an irrational number is not a true number, but lies hidden in a kind of cloud of infinity" (Kline: 251).

Wanneer we de irrationale getallen toevoegen aan de verzameling van rationale getallen Q, dan krijgen we de verzameling van alle <u>reële getallen</u> R:

$$R = \left\{.........,-21\frac{3}{17},...,-5,...,-\sqrt{3},...,-\frac{1}{4},...,0,...,\sqrt{2},...,\pi,...,\frac{9}{2},...,32.........\right\}$$

De volgende uitbreiding, namelijk die met de imaginaire en complexe getallen, valt buiten het bestek van dit boek.

De absolute waarde van een getal

Soms zijn we vooral geïnteresseerd in de afstand van een getal tot het getal 0 op de getallenlijn. In dat geval kan het teken (+ of -) buiten beschouwing worden gelaten, want de afstand van bijvoorbeeld -3 tot 0 is dezelfde als die van 3 tot 0, namelijk 3. Dit kan zich voordoen wanneer we de afwijkingen ten opzichte van een bepaald punt (vaak het punt 0) willen weten, los van de vraag of het afwijkingen naar boven of naar beneden betreft. In de wiskunde spreken we in dit geval van de absolute waarde (of modulus) van een getal dat wordt aangegeven door twee verticale strepen. We definiëren daarom het volgende:
onder de absolute waarde $|a|$ van een getal a verstaan we het getal zelf, met weglating van het er voor staande teken. Enkele voorbeelden zijn:

$|-3| = 3$ $\qquad$ $|3| = 3$

$\left|-5\frac{2}{3}\right| = 5\frac{2}{3}$ $\left|5\frac{2}{3}\right| = 5\frac{2}{3}$

$\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$ $\left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$

1.4 Logaritmen

In paragraaf 1.2 hebben we gezien dat een vraagstuk dat betrekking heeft op machtsverheffen van de vorm $a^p = ?$ is, terwijl het bij worteltrekken de vorm $?^p = b$ betreft. Anders gezegd, bij machtsverheffen zoeken we de macht (ook wel argument genoemd) en bij worteltrekken het grondtal. We kunnen echter ook op zoek zijn naar de exponent waarbij de vorm $a^? = b$ hoort. Het zoeken van de exponent noemen we logaritme nemen. We noteren dit als volgt: als $a^p = b$, dan is $p = {}^a\log b$. Dit betekent: ${}^a\log b$ is de exponent waartoe we a moeten verheffen om b te krijgen. M.a.w., ${}^a\log b = p$ en $a^p = b$ komen op hetzelfde neer. Wanneer we ${}^a\log b = p$ invullen (‘substitueren’) in $a^p = b$ krijgen we: $a^{{}^a\log b} = b$ waaruit blijkt dat ${}^a\log b$ inderdaad de exponent is waartoe we a moeten verheffen om b te krijgen.
Verder spreken we af dat wanneer het grondtal a gelijk is aan 10, we kortweg $\log b$ schrijven, $\log b$ betekent dus hetzelfde als ${}^{10}\log b$. We vatten het bovenstaande als volgt samen:
als geldt $a^p = b$ dan is
- machtsverheffen het berekenen van b
- worteltrekken het berekenen van a
- logaritme nemen het berekenen van p

Wanneer we als cijfervoorbeeld nemen $2^5 = 32$, dan komt
- machtsverheffen neer op het uitvoeren van de berekening $2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$ (de uitkomst is 2 tot de macht 5, nl. het getal 32)
- worteltrekken op het uitvoeren van de berekening $\sqrt[5]{32} = 2$ (de uitkomst is het grondtal 2)
- en logaritme nemen op het uitvoeren van de berekening ${}^2\log 32 = 5$ (de uitkomst is de exponent 5)

Voorbeelden:

a) ${}^3\log 9 = 2$ want $3^2 = 9$

b) ${}^2\log 16 = 4$ want $2^4 = 16$

c) $\log 100 = {}^{10}\log 100 = 2$ want $10^2 = 100$

d) $\log 0.1 = -1$ want $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$

e) $\log 10 = 1$ want $10^1 = 10$

f) $\log 1 = 0$ want $10^0 = 1$

g) ${}^2\log 1 = 0$ want $2^0 = 1$

h) ${}^6\log 6 = 1$ want $6^1 = 6$

i) ${}^8\log \frac{1}{64} = -2$ want $8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$

j) ${}^7\log \sqrt{7} = \frac{1}{2}$ want $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

Opgave 1.4.1)

a) ${}^3\log 27 =$

b) ${}^4\log 16 =$

c) ${}^{11}\log 11 =$

d) ${}^3\log 243 =$

f) ${}^3\log 3 =$

g) $\log 0.01 =$

h) $\log \frac{1}{\sqrt{10}} =$

i) ${}^9\log 3 =$

e) ${}^{3}\log 1 =$ j) ${}^{3}\log \frac{1}{9} =$

Voor de volledigheid geven we hieronder nog de regels die gelden voor logaritmen waarbij we gemakshalve uitgaan van het grondtal 10 (hoewel de conclusies geldig zijn voor elk grondtal).

Regel 1: $\log ab = \log a + \log b$

Om aan te tonen dat dit zo is, schrijven we: $10^{\log ab} = 10^{\log a + \log b}$ (dit volgt uit regel 1). Nu maken we gebruik van de regel dat $10^{p+q} = 10^{p} \times 10^{q}$. Dan volgt hieruit en uit de definitie van logaritme dat:

$ab = 10^{\log a} \times 10^{\log b} = a \times b = ab$.

Linkerlid en rechterlid zijn dus aan elkaar gelijk, dus is regel 1 juist.

Regel 2: $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

We gebruiken dezelfde redenering als bij regel 1, alleen passen we hier de regel $10^{p-q} = \frac{10^{p}}{10^{q}}$ toe. We krijgen dan: uit $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ volgt $10^{\log \frac{a}{b}} = 10^{\log a - \log b} = \frac{10^{\log a}}{10^{\log b}}$ en dit komt neer op $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$. Linker- en rechterlid zijn aan elkaar gelijk, dus is regel 2 juist.

Regel 3: $\log a^{n} = n \log a$

Afleiding: op dezelfde wijze, alleen met behulp van de regel $10^{pq} = \left(10^{q}\right)^{n}$. Uit $\log a^{n} = n \log a$ volgt $10^{\log a^{n}} = 10^{n \log a} = \left(10^{\log a}\right)^{n}$, dus $a^{n} = (a)^{n} = a^{n}$. Uit de gelijkheid van linker- en rechterlid concluderen we dat regel 3 juist is.

N.B. Omdat $\frac{1}{a} = a^{-1}$ en $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, volgt hieruit en uit regel 3 dat $\log \frac{1}{a} = \log a^{-1} = -\log a$ en $\log \sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a$.

Regel 4: ${}^{b}\log c = \frac{{}^{a}\log c}{{}^{a}\log b}$

We volgen weer dezelfde werkwijze met behulp van de regel $a^{pq} = \left(a^{p}\right)^{q}$.

Uit ${}^{b}\log c = \frac{{}^{a}\log c}{{}^{a}\log b}$ volgt ${}^{a}\log c = {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c$ (kruiselings vermenigvuldigen). We mogen vervolgens schrijven: $a^{{}^{a}\log c} = a^{{}^{a}\log b \times {}^{b}\log c}$ waaruit (per definitie) volgt:

$c = \left(a^{{}^{a}\log b}\right)^{{}^{b}\log c} = b^{{}^{b}\log c} = c$. Linker- en rechterlid zijn aan elkaar gelijk, dus is regel 4 juist.

Met behulp van regel 4 kunnen we op een willekeurig grondtal overgaan hetgeen goed van pas kan komen. Zo is ${}^{5}\log 6$ met behulp van regel 4 te herschrijven als $\frac{{}^{10}\log 6}{{}^{10}\log 5} = \frac{\log 6}{\log 5}$, hetgeen met behulp van de rekenmachine eenvoudig uit te rekenen is (het antwoord is ongeveer 1.1133 en de controle is: $5^{1.1133} = 6.000167....$, dus ongeveer 6). Ter afsluiting van deze paragraaf volgen nog enkele voorbeelden waarbij de bovenstaande regels kunnen worden toegepast (dit soort opgaven kan vaak op verschillende manieren opgelost worden).

Voorbeelden:

a) ${}^4\log\frac{1}{3} = {}^4\log 3^{-1} = -{}^4\log 3 = -\frac{\log 3}{\log 4}$

b) ${}^{100}\log\frac{1}{10} = \frac{\log\frac{1}{10}}{\log 100} = \frac{\log 1 - \log 10}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$ (controle: $100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{100^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$)

c) Gegeven is: $\log 3 = 0.4771$, $\log 6 = 0.7782$ en $\log 9 = 0.9542$ (afgerond). Bereken met behulp van deze gegevens: $\log 2$, $\log 18$, $\log 81$ en $\log\frac{1}{18}$.

antwoorden:

$\log 2 = \log\frac{6}{3} = \log 6 - \log 3 = 0.3011$

$\log 18 = \log(3\times 6) = \log 3 + \log 6 = 1.2553$

$\log 81 = \log 9^2 = 2\log 9 = 1.9084$

$\log\frac{1}{18} = \log\left(\frac{3}{6}\times\frac{1}{9}\right) = \log\frac{3}{6} + \log\frac{1}{9} = \log 3 - \log 6 + \log 9^{-1} = \log 3 - \log 6 - \log 9 = -1.2553$

d) $3^? = 8$. Op de plaats van het vraagteken moet komen te staan: ${}^3\log 8 = \frac{\log 8}{\log 3}$ en dit is afgerond 1.8928 (controle: $3^{1.8928} = 8.0000944......$)

Uitwerkingen en antwoorden:

Opgave 1.2.1)

a) 343, want $7\times 7\times 7 = 343$

b) -125

c) 625

d) 1

e) 1

f) $\frac{1}{9}$ want $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

g) $\frac{1}{9}$ want $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

h) $-\frac{1}{27}$ want $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$

i) 0 want $0\times 0\times 0 = 0$

j) $2\frac{10}{27}$ want $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{3^3}{4^3}} = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$

k) 3 want $3^7.3^{-2}.3^{-4} = 3^{7-2-4} = 3^1 = 3$

l) $-\frac{1}{27}$ want $\frac{3^3.(3^2)^5}{(-3)^9.3^7} = \frac{3^3.3^{10}}{-3^9.3^7} = -\frac{3^{13}}{3^{16}} = -3^{-3} = -\frac{1}{27}$

m) 1024 want $4^0.4^2.4^3 = 1.4^{2+3} = 4^5 = 1024$

n) $\frac{b}{a^6}$ want $\frac{a^3b^{-5}}{\left(a^3b^{-2}\right)^3} = \frac{a^3b^{-5}}{a^9b^{-6}} = a^{3-9}b^{-5-(-6)} = a^{-6}b^1 = \frac{b}{a^6}$

Opgave 1.2.2)

a) 11 want $11^2 = 121$

b) 30

c) 14

d) 50

e) 5 want $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

f) 1 want $1^2 = 1$

g) 10^3 want $\left(10^3\right)^2 = 10^6$

h) 16^{16} want $\left(16^{16}\right)^2 = 16^{32}$

i) 3 want $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

j) 16298

Opgave 1.2.3)

a) $7\sqrt{2}$ want $\sqrt{98} = \sqrt{2\times 7^2} = 7\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{6}$ want $\sqrt{54} = \sqrt{2\times 3^3} = \sqrt{2\times 3\times 3^2} = 3\sqrt{2\times 3} = 3\sqrt{6}$

c) $4\sqrt{3}$ want $\sqrt{48} = \sqrt{2^4\times 3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{10}$

e) $9\sqrt{2}$

f) $12\sqrt{3}$

g) $10\sqrt{5}$

h) $16\sqrt{2}$

i) $9\sqrt{11}$

j) $45\sqrt{2}$

Opgave 1.2.4)

a) antwoord: $\frac{1}{6}\sqrt{15}$ want $\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5\times 12}{12\times 12}} = \sqrt{\frac{60}{12^2}} = \frac{1}{12}\sqrt{2^2\times 3\times 5} = \frac{2}{12}\sqrt{15} = \frac{1}{6}\sqrt{15}$

of $\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5}{2^2\times 3}} = \sqrt{\frac{5\times 3}{2^2\times 3\times 3}} = \sqrt{\frac{5\times 3}{2^2\times 3^2}} = \frac{1}{2\times 3}\sqrt{5\times 3} = \frac{1}{6}\sqrt{15}$

b) antwoord: $\frac{2}{9}\sqrt{6}$ want $\sqrt{\frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{2^3}{3^3}} = \sqrt{\frac{2^3\times 3}{3^4}} = \sqrt{\frac{2^2\times 2\times 3}{3^4}} = \frac{2}{3^2}\sqrt{6} = \frac{2}{9}\sqrt{6}$

c) antwoord: $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ want $\sqrt{1\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{3^2}{2^3}} = \sqrt{\frac{3^2\times 2}{2^3\times 2}} = \sqrt{\frac{3^2\times 2}{2^4}} = \frac{3}{2^2}\sqrt{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

d) antwoord: $\frac{2}{5}\sqrt{10}$

e) antwoord: $\frac{1}{7}\sqrt{21}$

Opgave 1.2.5)

a) antwoord: $-3\sqrt[3]{2}$ want $\sqrt[3]{-54} = \sqrt[3]{-27\times 2} = \sqrt[3]{(-3)^3\times 2} = -3\sqrt[3]{2}$

b) antwoord: $2\sqrt[4]{3}$ want $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16\times 3} = \sqrt[4]{2^4\times 3} = 2\sqrt[4]{3}$

c) antwoord: bestaat niet

d) antwoord: $\frac{2}{3}$ want $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

e)antwoord: $-\frac{3}{4}$ want $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{3^3}{4^3} = -\frac{27}{64}$

f) antwoord: $\frac{1}{2}\sqrt[5]{12}$ want $\sqrt[5]{\frac{3}{8}} = \sqrt[5]{\frac{3}{2^3}} = \sqrt[5]{\frac{3\times 2^2}{2^3\times 2^2}} = \sqrt[5]{\frac{12}{2^5}} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{12}$

g) antwoord: $-\frac{1}{5}\sqrt[3]{10}$ want $\sqrt[3]{\frac{-2}{25}} = \sqrt[3]{\frac{-2}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{-2\times 5}{5^2\times 5}} = \sqrt[3]{\frac{-10}{5^3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{5^3}\times 10} = -\frac{1}{5}\sqrt[3]{10}$

h) antwoord: 0 want $\sqrt[17]{\frac{0}{-336}} = \sqrt[17]{0} = 0$ en $0^{17} = 0$

Opgave 1.2.6

a) $\frac{1}{a^2}$

b) $\sqrt[4]{2}$

c) $x^{-\frac{4}{7}}$

d) 1

e) $2^{\frac{3}{4}}$

f) $\sqrt[5]{a^3}$

g) $2^{-\frac{1}{3}}$ (want $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{2^{-1}} = 2^{-\frac{1}{3}}$)

h) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ (want $3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$)

i) $3^{-\frac{1}{2}}$ (want $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3^{-1}} = 3^{-\frac{1}{2}}$)

j) $10^{-\frac{1}{2}}$ (want $\sqrt{0.1} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \sqrt{10^{-1}} = 10^{-\frac{1}{2}}$)

Opgave 1.4.1)

a) 3

b) 2

c) 1

d) 5

e) 0

f) 1

g) -2

h) $-\frac{1}{2}$ want $10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

i) $\frac{1}{2}$ want $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

j) -2 want $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$